

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. заведующего кафедрой  
математического анализа  
Шабров С.А.



01.07.2021

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### **Б1.В.07 Математические модели процессов и систем**

*Код и наименование дисциплины в соответствии с Учебным планом*

- 1. Шифр и наименование направления подготовки/специальности:**  
02.04.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки/специализации:** Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** Магистр
- 4. Форма образования:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра математического анализа
- 6. Составители программы:**  
Курина Галина Алексеевна, докт. физ. –мат. наук, профессор
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, протокол №0500-07 от 29.06.2021
- 8. Учебный год:** 2022/2023 **Семестр(-ы):** 3

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### *Цели изучения дисциплины:*

- приобрести теоретические знания по составлению математических моделей в экономике и исследованию этих моделей.
- поскольку дискретные задачи имеют обширные приложения в экономике, т.к. информацию о состоянии системы получают в дискретные моменты времени, то познакомить студентов с методами решения дискретных уравнений, в том числе, решения задач управления дискретными системами, что способствует воспитанию математической культуры, необходимой эрудиции в вопросах прикладной математики, готовит к возможной работе в НИИ, КБ и т. п.

### *Задачи дисциплины:*

- демонстрация на примерах возникновения дискретных задач в экономике;
- установление методов решения дискретных уравнений;
- изучение методов решения задач управления дискретными системами;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Математические модели процессов и систем» относится к специальному курсу по направлению 02.04.01 «Математика и компьютерные науки» (магистратура).

Эта дисциплина базируется на знаниях, полученных в рамках курсов: «Алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Вариационное исчисление и оптимальное управление».

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки позволят в дальнейшем решать научные и технические проблемы, возникающие при решении дискретных систем в различных приложениях.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-2	способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом	знать: - теорию решения дискретных уравнений для исследования современных проблем математики; - современное состояние в исследовании дискретных уравнений; - методы и приемы проведения исследований в области задач управления дискретными системами; уметь: - видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения; - строить деловые отношения с работниками,

		<p>организовывать научно-исследовательские и научно-производственные работы;</p> <p>владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- способностью к интенсивной научно-исследовательской работе;</li> <li>- информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения;</li> <li>- адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы.</li> </ul>
ПК-12	<p>способность к проведению методических экспертных работ в области математики</p>	<p>знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- особенности развития теории дискретных уравнений на современном этапе;</li> <li>- методы сбора, анализа и обработки исходной информации для организации и проведения экспертных работ;</li> </ul> <p>уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- самостоятельно работать с различными источниками информации;</li> <li>- собирать исходные данные, систематизировать информацию, анализировать экспертные данные, устанавливать достоверность информации;</li> </ul> <p>владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- четким представлением о методах исследования дискретных уравнений;</li> <li>- математическим аппаратом для изучения дискретных уравнений.</li> </ul>

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 4/144.**

**Форма промежуточной аттестации** экзамен, 2 контрольные работы.

**13. Виды учебной работы:**

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		
	Всего	По семестрам	
		3 семестр	
Аудиторные занятия	50	50	
в том числе:			
лекции	20	20	
практические лабораторные	30	30	
Самостоятельная работа	58	58	
Форма промежуточной аттестации (Экзамен)	36	36	
Итого	144	144	

### 13.1 Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1	О лауреатах Нобелевской премии в области экономики	Биографии и достижения В.В. Леонтьева, П. Самуэльсона, Дж. Хикса, С. Кузнеца, Л. Канторовича
2	Дискретные модели экономики	Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса. Паутинообразная модель рынка. Уравнение межотраслевого баланса Леонтьева.
3	Дискретные (разностные) уравнения	Основные понятия. Решение линейных разностных уравнений 1-го, 2-го, n-го порядков. Системы линейных дискретных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
4	Метод наименьших квадратов	Линейная, гиперболическая, параболическая зависимости.
5	Вариационное исчисление для дискретных систем	Необходимое условие решения вариационной задачи. Уравнение Эйлера. Различные типы вариационных задач.
6	Обратные задачи дискретного вариационного исчисления	Условия разрешимости обратной задачи дискретного вариационного исчисления. Формула для решения.
7	Дискретные задачи оптимального управления	Нахождение оптимального программного управления. Дискретный принцип максимума.
8	Дискретные линейно-квадратичные задачи оптимального управления	Необходимое и достаточное условие разрешимости линейно-квадратичных задач оптимального управления
9	Синтез оптимальных линейных регуляторов	Матричное разностное уравнение Риккати в различных формах
10	Дискретные уравнения с малым шагом	Метод пограничных функций асимптотического решения дискретных уравнений с малым шагом
<b>2. Практические занятия</b>		
№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Дискретные (разностные) уравнения	Решение линейных разностных уравнений 1-го, 2-го, n-го порядков.
2	Дискретные (разностные) уравнения	Системы линейных дискретных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
3	Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса.	Решение уравнения из модели экономического цикла Самуэльсона-Хикса.
4	Паутинообразная модель рынка.	Решение уравнения из паутинообразной модели рынка.
5	Метод наименьших квадратов	Построение линейной зависимости.
6	Метод наименьших квадратов	Построение гиперболической, параболической зависимостей.
7	Контрольная работа 1	Контрольная работа 1. Решение линейных разностных уравнений. Построение линейной зависимости.
8	Вариационное исчисление для дискретных систем	Необходимое условие решения вариационной задачи. Уравнение Эйлера для задачи со свободными концами.
9	Вариационное исчисление для дискретных систем	Уравнение Эйлера для задачи с закрепленными концами.
10	Обратные задачи	Обратные задачи дискретного вариационного исчисления для

	дискретного вариационного исчисления	уравнений второго порядка.
11	Дискретные линейно-квадратичные задачи оптимального управления	Решение дискретных линейно-квадратичных задач оптимального управления
12	Синтез оптимальных линейных регуляторов	Матричное разностное уравнение Риккати в различных формах
13	Дискретные уравнения с малым шагом	Построение методом пограничных функций асимптотического решения дискретных уравнений с малым шагом нулевого порядка
14	Дискретные уравнения с малым шагом	Построение методом пограничных функций асимптотического решения дискретных уравнений с малым шагом первого порядка. Графическая иллюстрация асимптотических решений разных порядков.
15	Контрольная работа 2	Контрольная работа 2. Решение задач дискретного вариационного исчисления и дискретных линейно-квадратичных задач оптимального управления.

### 13.2 Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий			
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа	Всего
1	О лауреатах Нобелевской премии в области экономики и их достижениях	2	0	6	8
2	Разностные уравнения	2	6	6	14
3	Приложения дискретных уравнений	2	4	6	12
4	Метод наименьших квадратов	2	4	6	12
5	Вариационное исчисление для дискретных систем	2	4	6	12
6	Обратная задача вариационного исчисления	2	2	6	10
7	Дискретные задачи оптимального управления	4	2	6	12
8	Синтез оптимальных линейных регуляторов	2	2	6	10
9	Сингулярно возмущенные дискретные задачи с малым шагом	2	6	10	18
Итого		20	30	58	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

Для успешной сдачи зачета необходимо работать с конспектами лекций, выполнять практические и индивидуальные задания.

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видовисточников)**

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<b><u>Красс, Максим Семенович</u></b> . Математические методы и модели для магистрантов экономики : [учебное пособие для студ., обуч. в магистратуре по направлению "Экономика" и др. экон. специальностям] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов .— СПб. [и др.] : Питер, 2010 .— 496 с. : ил., табл. — (Учебное пособие) (2-е изд., доп.) .— Библиогр.: с. 486-492 .— Предм. указ.: с. 493-496 .— ISBN 978-5-49807-811-3.
2	<b><u>Болтянский, Владимир Григорьевич</u></b> . Беседы о математике / В.Г. Болтянский, А.П. Савин .— М. : ФИМА : МЦНМО, 2002.-Кн. 1: Дискретные объекты .— 2002 .— 367 с. : ил. — Предм. указ.: с. 367 .— ISBN 5-89492-011-6 (ФИМА) (в пер.) .— ISBN 5-94057-040-2 (МЦНМО).
3	<i>Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А.Б. Васильева [и др.] .— Изд. 3-е, испр. — СПб ; М. ; Краснодар : Лань, 2010 .</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4	<i>D. S. Naidu, Optimal Control Systems, CRC Press, Boca Raton London, New York, Washington, 2003.</i>
5	<b><u>Пропой, Анатолий Иванович</u></b> . Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой .— М. : Наука, 1973 .— 255 с. : ил .— (Оптимизация и исследование операций) .
6	<b><u>Фан Лянь-Цзэнь</u></b> . Дискретный принцип максимума. Оптимизация многоступенчатых процессов / Фан Лянь-Цзэнь, Вань Чу-Сен ; Пер. с англ. В.И. Кузьмина и Х.Л. Мучника; Под ред. А.И. Пропоя .— М. : Мир, 1967 .— 180 с. : ил.
7	<i>Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами, М.: Наука, 1973.</i>
8	<b><u>Ахтямов, Азамат Мухтарович</u></b> . Математика для социологов и экономистов : Учебное пособие для студ. вузов, обуч. по социал.-экон. направлениям и специальностям / А. М. Ахтямов .— М. : Физматлит, 2004 .— 462 с. : ил. — Алф. указ.: с. 457-462 .— Библиогр.: с. 453-455 .— ISBN 5-9221-0460-8 ((в пер.))
9	<b><u>Тихонов, Андрей Николаевич</u></b> . Дифференциальные уравнения : Учебник для студ. физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников .— 4-е изд., стер. — М. : Физматлит, 2002 .— 253 с. — (Курс высшей математики и математической физики ; Вып. 6) .— ISBN 5-9221-0277-X .— ISBN 5-9221-0134-X.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
10	<i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a></i>
11	<i>Google, Yandex, Rambler</i>

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:**

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается проведение консультаций и тесный контакт с преподавателем, осуществляемый с помощью удаленной связи через интернет.

Самостоятельная работа, прежде всего, заключается в изучении литературы, дополняющей материал, излагаемый на лекции, и в выполнении

практических индивидуальных заданий. Необходимо овладеть навыками библиографического поиска, в том числе, среди сетевых ресурсов, уметь находить подходящие источники, творчески и критически перерабатывать информацию, научиться сопоставлять различные точки зрения и определять методы исследований, а также представлять в письменной форме изложение результатов решения задач.

**17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

Для выполнения индивидуальных заданий должны использоваться стандартные программы типа «Математика».

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий. Доска, мел, тряпка, учебные пособия, компьютер.

**19. Фонд оценочных средств:**

**19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения**

Код и содержание компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-2: способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, к управлению научным коллективом	<p><u>Знать:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные математические модели экономики;</li> <li>- теорию решения дискретных уравнений для исследования современных проблем математики;</li> <li>- современное состояние в исследовании дискретных уравнений.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Дискретные модели экономики;</li> <li>- Дискретные (разностные) уравнения</li> </ul>	Устный опрос
	<p><u>Уметь:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- видеть и понимать пути дальнейшего развития теории и методов ее решения;</li> <li>- строить деловые отношения с работниками, организовывать научно-исследовательские и научно-производственные работы.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Вариационное исчисление для дискретных систем;</li> <li>- Обратные задачи дискретного вариационного исчисления;</li> <li>- Дискретные задачи оптимального управления.</li> </ul>	Устный опрос, контрольная работа

	<p><u>Владеть:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- способностью к интенсивной научно-исследовательской работе;</li> <li>- информацией о состоянии дел в каждом подразделении научного учреждения;</li> <li>- адекватным математическим аппаратом для ведения научно-исследовательской работы</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Вариационное исчисление для дискретных систем;</li> <li>- Дискретные задачи оптимального управления</li> </ul>	<p>Индивидуальные задания, контрольная работа</p>
--	--	---	---

<p>ПК-12: способность к проведению методических и экспертных работ в области математики</p>	<p><u>Знать:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные математические модели экономики;</li> <li>- особенности развития теории дискретных уравнений на современном этапе;</li> <li>- методы сбора, анализа и обработки исходной информации для организации и проведения экспертных работ.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Дискретные модели экономики;</li> <li>- Дискретные (разностные) уравнения;</li> <li>- Вариационное исчисление для дискретных систем;</li> <li>- Дискретные задачи оптимального управления</li> </ul>	<p>Устный опрос</p>
	<p><u>Уметь:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- самостоятельно работать с различными источниками информации;</li> <li>- собирать исходные данные, систематизировать информацию, анализировать экспертные данные, устанавливать достоверность информации.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Дискретные модели экономики;</li> <li>- Дискретные (разностные) уравнения;</li> <li>- Вариационное исчисление для дискретных систем;</li> <li>- Дискретные задачи оптимального управления</li> </ul>	<p>Устный опрос</p>
	<p><u>Владеть:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- четким представлением о методах исследования уравнений;</li> <li>- математическим</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Дискретные (разностные) уравнения;</li> <li>- Вариационное исчисление для дискретных систем;</li> </ul>	<p>Индивидуальное задание, контрольная работа</p>



	аппаратом для изучения дискретных уравнений.	-Дискретные задачи оптимального управления; -Сингулярно возмущенные дискретные задачи с малым шагом	
Промежуточная аттестация			Билеты к экзамену

### 19.2. Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации)

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основных математических моделей экономики и методов решения дискретных задач;
- 2) умение самостоятельно работать с различными источниками информации, анализировать полученные результаты, устанавливать достоверность информации;
- 3) умение находить решение дискретных уравнений; решать дискретные задачи вариационного исчисления и оптимального управления; строить асимптотические решения задач с малым шагом;
- 4) владение методами решения дискретных (разностных) уравнений, дискретных вариационных задач и задач оптимального управления, а также навыками построения асимптотического решения дискретных задач с малым шагом при помощи метода пограничных функций.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенции	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных определений, понятий и идей изучаемого курса, знание с небольшими недочетами	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>

доказательств основных результатов. Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение использовать математический аппарат для формализации, анализа и выработки решений.		
Фрагментарные знания или отсутствие знаний и умений	–	<i>Неудовлетворительно</i>

**19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

**19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:**

1. О лауреатах Нобелевской премии в области экономики и их достижениях
2. Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса.
3. Паутинообразная модель рынка.
4. Уравнение межотраслевого баланса Леонтьева.
5. Дискретные (разностные) уравнения. Решение линейных разностных уравнений 1-го, 2-го, n-го порядков.
6. Системы линейных дискретных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
7. Построение линейной, гиперболической, параболической зависимостей по дискретным данным.
8. Необходимое условие решения дискретной вариационной задачи. Дискретное уравнение Эйлера. Различные типы вариационных задач.
9. Условия разрешимости обратной задачи дискретного вариационного исчисления. Формула для решения.
10. Нахождение оптимального программного управления. Дискретный принцип максимума.
11. Необходимое и достаточное условие разрешимости линейно-квадратичных задач оптимального управления.
12. Матричное разностное уравнение Риккати в различных формах.
13. Метод пограничных функций асимптотического решения дискретных уравнений с малым шагом.

**19.3.2 Перечень практических заданий**

1. Решение линейных разностных уравнений 1-го, 2-го, n-го порядков.
2. Системы линейных дискретных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
3. Решение уравнения из модели экономического цикла Самуэльсона-Хикса.
4. Решение уравнения из паутинообразной модели рынка.
5. Построение линейной зависимости.
6. Построение гиперболической, параболической зависимостей.
7. Уравнение Эйлера для задачи со свободными концами.
8. Уравнение Эйлера для задачи с закрепленными концами.
9. Обратные задачи дискретного вариационного исчисления для уравнений второго порядка.
10. Решение дискретных линейно-квадратичных задач оптимального управления.
11. Построение методом пограничных функций асимптотического решения дискретных уравнений с малым шагом.





Направление подготовки / специальность 02.04.01 Математика и компьютерные науки

*шифр, наименование*

Дисциплина \_\_\_\_\_ Экономико-математическое моделирование

Вид контроля \_\_\_\_\_

Экзамен

*промежуточный контроль - экзамен, зачет; текущий контроль с указанием формы*

Вид аттестации \_\_\_\_\_

промежуточная

*текущая, промежуточная*

### **Контрольно-измерительный материал № 3**

#### **Теория:**

1. Паутинообразная модель рынка.
2. Сингулярно возмущенные дискретные задачи

#### **Практика:**

1. Решить задачу минимизации функционала

$$J = x_1^2(10) + 2x_2^2(10) + \sum_{k=0}^9 0,5(x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k))$$

на траекториях системы

$$x_1(k+1) = 0,8x_1(k) + x_2(k) + u(k),$$

$$x_2(k+1) = 0,6x_2(k) + 0,5u(k)$$

при условиях  $x_1(0) = 5$  и  $x_2(0) = 3$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ /Курина Г.А./  
*подпись* *расшифровка подписи*

Направление подготовки / специальность 02.04.01 Математика и компьютерные науки

*шифр, наименование*

Дисциплина \_\_\_\_\_ Экономико-математическое моделирование

Вид контроля

Экзамен

*промежуточный контроль - экзамен, зачет; текущий контроль с указанием формы*

Вид аттестации

промежуточная

*текущая, промежуточная*

## **Контрольно-измерительный материал № 4**

### **Теория:**

1. Уравнение межотраслевого баланса Леонтьева.
2. Сингулярно возмущенные дискретные задачи с малым шагом.

### **Практика:**

1. Найти последовательность чисел Фибоначчи, начинающуюся с нуля и единицы, в которой каждый последующий элемент равен сумме двух непосредственно предшествующих ему.

Преподаватель \_\_\_\_\_ /Курина Г.А./  
*подпись* *расшифровка подписи*

---







